Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 5

Równoważność norm.
Przestrzeń operatorów ograniczonych.

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Równoważność norm

Rozważmy dwie normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ na przestrzeni liniowej X.

Def. Norma $\|\cdot\|_1$ jest **mocniejsza** od normy $\|\cdot\|_2$ jeżeli

$$\exists_{c>0}\ \forall_{x\in X} \qquad \|x\|_2 \leq c\|x\|_1.$$

Lem. Następujące warunki są równoważne:

1. norma $\|\cdot\|_1$ jest mocniejsza, niż $\|\cdot\|_2$
2. zbieżność w normie $\|\cdot\|_1$ pociąga zbieżność w normie $\|\cdot\|_2$
3. topologia zadana przez $\|\cdot\|_1$ jest mocniejsze (większa) od topologii zadanej przez $\|\cdot\|_2$.

Dowód: 1 Norma $\|\cdot\|_1$ jest mocniejsza od normy $\|\cdot\|_2 \Longleftrightarrow$

$id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ jest operatorem ograniczonym $\overset{Tw.}{\Longleftrightarrow}$

odwzorowanie $id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ jest ciągłe

(kryterium Heinego) $\Updownarrow$ 2 (definicja topologiczna) $\Updownarrow$ 3

$\blacksquare$

Def. Normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są **równoważne** jeżeli norma $\|\cdot\|_1$ jest jednocześnie mocniejsza i słabsza od $\|\cdot\|_2$, czyli gdy

$$\exists_{c_1,c_2>0}\ \forall_{x\in X} \qquad \|x\|_2 \leq c_1\|x\|_1 \quad \text{oraz} \quad \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2.$$

Stw. Następujące warunki są równoważne:

1. normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne
2. zbieżność ciągu w $\|\cdot\|_1$ jest równoważna zbieżności w $\|\cdot\|_2$
3. topologie zadane przez $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są takie same.

Ponadto jesli normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne, to

$(X,\|\cdot\|_1)$ jest przest. Banacha $\iff$ $(X,\|\cdot\|_2)$ jest przest. Banacha

Dowód: Równoważność warunków (1)-(3) wynika z lematu.
Jeśli $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne, to ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ jest Cauchy w normie $\|\cdot\|_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest Cauchy w $\|\cdot\|_2$, bo

$$\|x_n-x_m\|_2 \leq c_1\|x_n-x_m\|_1 \quad \text{oraz} \quad \|x_n-x_m\|_1 \leq c_2\|x_n-x_m\|_2.$$

Zatem z równoważności zbieżności mamy równoważność zupełności ■

Prz. Na przestrzeni $X = C[0,1]$ następujące normy

$$\|x\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |x(t)|, \quad \|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

nie są równoważne. Rzeczywiście, niech $x_n(t) = t^n$. Wtedy $\|x_n\|_p^p = \int_0^1 t^{pn} \, dt = \frac{1}{pn+1} \to 0$, czyli $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$. Ale $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ jest rozbieżny w normie $\|\cdot\|_\infty$ (nie jest zbieżny jednostajnie). Zatem $\|\cdot\|_p$ nie jest mocniejsza, niż $\|\cdot\|_\infty$. Z drugiej strony

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \le \left(\int_0^1 \|x\|_\infty^p \, dt \right)^{1/p} = \|x\|_\infty$$

Czyli $\|\cdot\|_\infty$ jest (ściśle) mocniejsza, niż $\|\cdot\|_p$ (**zbieżność jednostajna pociąga zbieżność w L^p, ale nie na odwrót**).

Dla $p < p'$, $\|\cdot\|_{p'}$ jest ściśle mocniejsza, niż $\|\cdot\|_p$

(Hint: Nierówność Höldera oraz ciąg $x_n(t) = (\frac{1}{t})^{\frac{1}{p}} 1_{[\frac{1}{n},1]} + n^{\frac{1}{p}} 1_{[0,\frac{1}{n})}$.)

Prz. W przestrzeni $X = \mathbb{F}^n$ normy

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |x(k)|, \qquad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x(k)|^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

są równoważne, ponieważ $\|x\|_\infty \le \|x\|_p$ oraz $\|x\|_p \le n\|x\|_\infty$.

Twierdzenie.

W przestrzeni skończenie wymiarowej wszystkie normy są równoważne.

Dowód: Z założenia istnieją liniowo niezależne $e_1, \dots, e_n \in X$ takie, że $\forall_{x\in X}\ \exists_{x(1),\dots,x(n)\in\mathbb{F}}\ x = \sum_{k=1}^n x(k)e_k$. Wtedy $X \cong \mathbb{F}^n$, gdzie $x \mapsto (x(1), \dots, x(n))$. Zdefiniujmy na X normę wzorem

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |x(k)|, \qquad \text{gdzie } x = \sum_{k=1}^n x(k)e_k.$$

Wystarczy pokazać, że dowolna norma $\|\cdot\|$ na X jest równoważna z $\|\cdot\|_\infty$ (bo równoważność norm jest relacją równoważności). Zauważmy, że

$$\|x\| = \|\sum_{k=1}^{n} x(k)e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x(k)e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x(k)|\|e_k\|$$

$$\leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|. \text{ Zatem } \|\cdot\|_\infty \text{ jest mocniejsza, niż } \|\cdot\|.$$

Załóżmy nie wprost, że $\|\cdot\|$ nie jest mocniejsza, niż $\|\cdot\|_\infty$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ znajdziemy $x_n \in X$ takie, że $\|x_n\|_\infty > n\|x_n\|$. Kładąc $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_\infty}$ mamy

$$\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|_\infty} < \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Zatem z jednej strony $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Z drugiej strony, $\|y_n\|_\infty = 1$. Czyli ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony w normie $\|\cdot\|_\infty$, która jest jest równoważna normie euklidesowej $\|\cdot\|_2$ (patrz Przykład). Zatem na mocy **Twierdzenia Bolzano-Weierstrassa**, istnieje podciąg $\{y_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego $y \in X$ w normie $\|\cdot\|_\infty$. Wtedy $\|y\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|y_{n_k}\|_\infty = 1$ i w szczególności $y \neq 0$. Ale skoro $\|\cdot\|_\infty$ jest mocniejsza, niż $\|\cdot\|$, to $y_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} y \neq 0$  bo $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ■

Wn. Każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń Y przestrzeni unormowanej X jest domknięta.

Dowód: Skoro norma na $Y \cong \mathbb{F}^n$ równoważna normie euklidesowej, to Y zupełna. Zatem Y domknięta w każdej nadprzestrzeni. ■

Wn. Każdy operator liniowy określony na przestrzeni skończenie wymiarowej jest ograniczony (ciągły).

Dowód: Niech $T : X \to Y$ liniowy i $X \cong \mathbb{F}^n$. Skoro na X wszystkie normy są równoważne, to możemy założyć, że $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x(k)|$. Wtedy

$$\|Tx\| = \|T\sum_{k=1}^{n} x(k)e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x(k)|\|Te_k\| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|.$$

Czyli T jest ograniczony (ciągły). ■

Wn. Każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń Y przestrzeni unormowanej X jest domknięta.

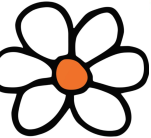
Dowód: Skoro norma na $Y \cong \mathbb{F}^n$ równoważna normie euklidesowej, to Y zupełna. Zatem Y domknięta w każdej nadprzestrzeni. ■

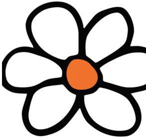
Wn. Każdy operator liniowy określony na przestrzeni skończenie wymiarowej jest ograniczony (ciągły).

Dowó ystkie

normy

$\|x\| =$





Przestrzeń operatorów ograniczonych

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi.

Przestrzeń operatorów ograniczonych z X w Y

$$B(X, Y) := \{T : X \to Y \text{ operator liniowy i ograniczony}\}$$

jest przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wraz z działaniami

$$(T + S)x := Tx + Sx, \qquad (\lambda T)x := \lambda Tx \quad \left(\begin{array}{c}\text{działania}\\ \text{określone}\\ \text{punktowo!}\end{array}\right)$$

oraz normą operatorową $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

Twierdzenie

$B(X, Y)$ przestrzeń Banacha $\Longleftrightarrow$ Y przestrzeń Banacha

Dowód:

"$\Longrightarrow$" Niech $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ ciąg Cauchy. Zwiążemy z nim pewien ciąg operatorów $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B(X,Y)$ "jednowymiarowych". Weźmy dowolny wektor unormowany $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$. Położmy

$$T_n x := \begin{cases} \lambda y_n, & \text{jeśli } x = \lambda x_0 \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

Wtedy

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| = \sup_{|\lambda|=1} \|T_n \lambda x_0\| = \|T_n x_0\| = \|y_n\|.$$

Zatem operatory T_n są ograniczone.Ponadto

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T_m)x\| = \|T_n x_0 - T_m x_0\| = \|y_n - y_m\|.$$

Czyli $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B(X,Y)$ ciąg Cauchy. Skoro $B(X,Y)$ zupełna, to $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnego $T \in B(X,Y)$. Wtedy $T_n x \to Tx$ dla każdego $x \in X$ (bo $\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\| \|x\| \to 0$).

W szczególności, $y_n = T_n x_0 \to T x_0$. Czyli ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

"$\Longleftarrow$"Niech $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B(X,Y)$ ciąg Cauchy. Dla każdego $x \in X$ mamy $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \to 0$. Zatem $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ jest ciągiem Cauchy w Y.Z założenia więc jest on zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez $Tx \in Y$. W ten sposób otrzymujemy operator liniowy $T : X \to Y$ (operacja granicy jest liniowa). Ponadto,

$$\begin{aligned}\|(T - T_n)x\| &= \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)x\| \\ &\leq \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|\|x\| \leq \sup_{m\geq n} \|T_m - T_n\|\|x\|.\end{aligned}$$

Stąd

$$\|T - T_n\| \leq \sup_{m\geq n} \|T_m - T_n\| \longrightarrow 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Czyli $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega w normie do T. W szczególności, $T - T_n \in B(X,Y)$ (dla dostatecznie dużych n) i skoro $T_n \in B(X,Y)$, to $T = (T - T_n) + T_n \in B(X,Y)$ jest ograniczony.

Czyli $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w przestrzeni $B(X,Y)$.$\blacksquare$

Przestrzeń dualna

Ciało skalarów $Y := \mathbb{F}$ jest przestrzenią Banacha.

Definicja

Przestrzeń Banacha $B(X, \mathbb{F})$ nazywamy **przestrzenią sprzężoną** lub też **przestrzenią dualną** do przestrzeni X i oznaczamy ją X^*. Elementy przestrzeni $X^* = B(X, \mathbb{F})$ nazywamy **funkcjonałami ograniczonymi** na X.

Prz. Przykładem funkcjonału ograniczonego jest całka

$$L^1(\mu) \ni x \longmapsto f(x) := \int x \, d\mu \in \mathbb{F}.$$

Uw. Zasadniczą motywacją do rozważania przestrzeni dualnej X^* jest fakt, że pozwala ona zdefiniować następującą formę dwuliniową (zwaną czasem *parowaniem*)

$$X^* \times X \ni (f, x) \longmapsto \langle f, x \rangle := f(x) \in \mathbb{F},$$

która imituje **iloczyn skalarny** na X.